Klasse F12T6

3. Schulaufgabe aus der Mathematik am 28.4.2009

Analysis

1.0 Gegeben ist die reelle Funktionen $f: x \mapsto x^2 \cdot \ln(\frac{1}{16}x^2)$. Ihr Graph heißt G_f.

1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_f an und untersuchen Sie den G_f Symmetrie. Bestimmen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. . [8]

1.2 Berechnen Sie dann die ersten beiden Ableitungsfunktionen der Funktion f. Bestimmen Sie damit Art und Koordinaten der Extrempunkte.
[Teilergebnis: $f'(x) = 2x \cdot (\ln(\frac{1}{16}x^2) + 1)$] [9]

1.3 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Zwischenwerte den Graphen von f für $-4{,}5 \le x \le 4{,}5$ in das vorhandene Koordinatensystem. [4]

2.1 Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl b gibt, so dass $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(\frac{1}{16}x^2) + bx^3$ eine Stammfunktion von f ist.
[Ergebnis: $b = -\frac{2}{9}$] [4]

2.2 Der Graph G_f und die Gerade $x = k$, $0 < k < 4$, begrenzen ein endliches Flächenstück mit der Maßzahl A(k). Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem von 1.3 für k = 1 und berechnen Sie A(k).
Berechnen Sie damit die Maßzahl des endlichen Flächenstücks, das vom Graphen von f im IV. Quadranten begrenzt wird.
(Auf die Verwendung der Regel von l`Hospital darf verzichtet werden.) [5]

2.3.0 Durch $g(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 \cdot \ln(\frac{1}{16}x^2) & \text{für } x < 4 \\ h(x) = -8\dfrac{x^2 - 12x + 32}{x} & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$ ist eine zweite reelle Funktion definiert.

2.3.1 Zeichnen Sie den Graphen G_g von g andersfarbig in das vorhandene Koordinatensystem. Begründen Sie kurz, dass der Graph von g an der Stelle $x_0 = 4$ stetig ist. [4]

2.3.2 Untersuchen Sie die Funktion g an der Stelle $x_0 = 4$ auf Differenzierbarkeit. [4]

2.3.3 Die beiden von der positiven x-Achse und Gg begrenzten endlichen Flächenstücke scheinen annähernd die gleiche Flächenmaßzahl zu besitzen. Entscheiden Sie durch Rechnung, welche die größere der beiden ist. [5]

Analytische Geometrie

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Geradenscharen

$$g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } h_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \\ 2+5t \end{pmatrix} \text{ mit } s, t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3.1 Begründen Sie, dass jede der beiden Geradenscharen jeweils eine Ebene festlegen. [2]

3.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene G, die durch die Geraden g_S festgelegt wird, in der Parameterform und in der Normalenform.
Welche besondere Lage hat die Ebene G im Koordinatensystem?
[mögliches Ergebnis: G : $3x_1 - x_3 = 0$] [5]

3.3 Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_t in der Ebene H : $3x_1 + 2x_2 - 12 = 0$ liegen. [2]

3.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden s, in der sich die Ebenen G und H schneiden.
[Zur Kontrolle: $s = g_6$] [4]

3.5 Berechnen Sie, für welchen Wert von t die Geraden g_S und h_t parallel sind. [t = 2]
Untersuchen Sie, ob die beiden Geraden für diesen Fall auch identisch sein können. [6]

3.6 Berechnen Sie den Abstand der Geraden g_2 von der Gerade h_2. [5]

NP

Klasse F12T6

3. Schulaufgabe aus der Mathematik am 28.4.2009 Name ....

1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3.1	2.3.2	2.3.3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	Σ